

Simetría de los conjuntos de Julia de la familia

$$z \mapsto z^k + c^*$$

Juan Bobenrieth Hochfärber

Resumen.

En el presente trabajo, se confeccionó un programa computacional en Turbo Pascal V 5.5, para dibujar los Conjuntos de Julia de la familia $z \mapsto z^k + c$. Esto permitió intuir cuatro resultados referentes a la simetría de los Conjuntos de Julia de la familia polinomial mencionada, que dicen lo siguiente:

- k par y $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ El Conjunto de Julia de $z^k + c$ es simétrico con respecto a ambos ejes y al origen.
- k par y $c \in \mathbb{C} \Rightarrow$ El Conjunto de Julia de $z^k + c$ es simétrico con respecto al origen.
- k impar y $c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ El Conjunto de Julia de $z^k + c$ es simétrico con respecto al eje X .
- k impar y $c = i\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$ El Conjunto de Julia de $z^k + c$ es simétrico con respecto al eje Y .

1 Preliminares

Nuestro estudio se enmarca dentro de los sistemas dinámicos discretos en la Esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ generados por transformaciones analíticas

$$f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

Es decir, nuestro Espacio de Fase será la Superficie de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, que es homeomorfa a la esfera S^2 ,

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

*Este trabajo ha sido financiado por la dirección de investigación, promoción y desarrollo DIPRODE de la Universidad del Bío Bío, Proyecto 920506-1

Utilizando la correspondencia que existe entre los puntos de $\overline{\mathbb{C}}$ y los puntos de S^2 , es posible definir una métrica sobre $\overline{\mathbb{C}}$ de la siguiente manera:

Para z, z' en $\overline{\mathbb{C}}$ se define la distancia de z a z' , $d(z, z')$, como la distancia entre los puntos correspondientes Z y Z' en \mathbb{R}^3 .

Si $Z = (x_1, x_2, x_3)$ y $Z' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ entonces:

$$d(z, z') = [(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2]^{1/2}$$

Utilizando ahora la correspondencia se obtiene:

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{[(1 + |z|^2) \cdot (1 + |z'|^2)]^{1/2}}, \quad \text{para } z, z' \in \mathbb{C}.$$

$$\text{y } d(z, \infty) = \frac{2}{(1 + |z|^2)^{1/2}}, \quad \text{para } z \in \mathbb{C}.$$

Consideraremos esta métrica sobre $\overline{\mathbb{C}}$, llamada "métrica esférica".

Toda función analítica $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ puede ser escrita en la forma:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios con coeficientes complejos y no tienen factores comunes. Los polos de $\frac{p}{q}$ son justamente los puntos de $\overline{\mathbb{C}}$ que son mapeados al infinito (Ver [Hi] para detalles). Se define el:

$$\text{grado}(f) = \max \{ \text{grado}(p), \text{grado}(q) \}$$

Consideraremos funciones racionales de grado ≥ 2 .

Dado $z \in \overline{\mathbb{C}}$, se definen:

$$f^0(z) = z, f^1(z) = f(z), f^2(z) = f(f(z)) \text{ y en general:}$$

$$f^n(z) = f(f^{n-1}(z)), \quad \forall n \geq 1$$

$O^+(z) = \{f^n(z): n \geq 0\}$, llamada la *órbita positiva* de z por f .

$O^-(z) = \{w \in \overline{\mathbb{C}}: f^n(w) = z, \text{ para algún } n \geq 0\}$, llamada la *órbita negativa* de z por f .

Si $f^n(z) = z$ para algún n , diremos que z es un punto periódico y que $O^+(z)$ es una *órbita periódica*; si n es el menor natural tal que $f^n(z) = z$, n es llamado el período de la órbita. En este caso, $O^+(z) = \{z, f(z), f^2(z), \dots, f^{n-1}(z)\}$. Cuando el período n de una órbita es 1, decimos que z es un punto fijo para f .

Definición 1.1 Sea z_0 un punto periódico de período n para una función analítica $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, y sea $\lambda = (f^n)'(z_0)$. Se dice que z_0 es:

- Atractor* si $0 < |\lambda| < 1$.
- Superatractor* si $\lambda = 0$.
- Repulsor* si $|\lambda| > 1$.
- Neutro* (o *indiferente*) si $|\lambda| = 1$.

Definición 1.2 Sea F una colección de funciones analíticas de $\bar{\mathbb{C}}$ en $\bar{\mathbb{C}}$ y U un abierto de $\bar{\mathbb{C}}$. Se dice que la familia F es normal en U si toda sucesión $\{f_n\} \subseteq F$, posee una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge uniformemente en los compactos de U .

(La definición anterior utiliza la métrica esférica en $\bar{\mathbb{C}}$).

Definición 1.3 Sea $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ una función analítica de grado ≥ 2 . Un punto $z \in \bar{\mathbb{C}}$ es un elemento del Conjunto de Fatou $F(f)$ de f , si existe una vecindad U de z en $\bar{\mathbb{C}}$ tal que la familia de iterados $\{f^n\}_{n \geq 0}$ es normal en U . El Conjunto de Julia de $J(f)$ de f , es el complemento del Conjunto de Fatou. Es decir:

$$F(f) = \{z \in \bar{\mathbb{C}}: \exists U \text{ vecindad de } z \text{ en } \bar{\mathbb{C}} \text{ tal que } \{f^n\}_{n \geq 0} \text{ es normal en } U\}.$$

$$J(f) = \bar{\mathbb{C}} \setminus F(f).$$

Proposición 1.4 (Ver [Bo]) Sea z_0 un punto periódico para una función analítica $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. Si z_0 es repulsor, entonces $z_0 \in J(f)$.

Proposición 1.5 (Ver [Bo]) Sea $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ una función analítica y $z_0 \in J(f)$. Entonces se tiene que:

$$J(f) = \text{clausura de } \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0) \quad (*)$$

Proposición 1.6 (Ver [Sa]) Sea $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ una aplicación analítica de grado $d \geq 2$. Se tiene que, el número de órbitas periódicas no-repulsoras es menor o igual que $6 \cdot (d - 1)$.

Observación 1.7 Notemos que toda función analítica $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ de grado ≥ 2 tiene una infinidad de órbitas periódicas (basta resolver $f^n(z) = z$ para cada $n \geq 1$, para hallar las órbitas periódicas). De acuerdo a 1.6, todas ellas (salvo una cantidad finita) son repulsoras. En particular, esto último nos asegura que toda función analítica de grado ≥ 2 tiene una cantidad infinita de puntos periódicos repulsivos.

2 Resultados.

Proposición 2.1 Sea $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $f(z) = z^k + c$, con k un número natural par y $c \in \mathbb{C}$. Entonces, $J(f)$ es simétrico con respecto al origen. Si además, $c \in \mathbb{R}$, $J(f)$ es simétrico con respecto al eje X y al eje Y .

Demostración.

i) Sea $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $f(z) = z^k + c$, $k \in \mathbb{N}$ par, y $c \in \mathbb{C}$ cualquiera. Debemos probar que $z \in J(f) \iff -z \in J(f)$.

Por Observación 1.7, sabemos que f tiene una cantidad infinita de puntos periódicos repulsores; sea z_0 uno de ellos. Por proposición 1.4, $z_0 \in J(f)$. Ahora, por (*) tenemos que:

$$J(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0)}$$

Del hecho que k es par, es inmediato que $f(-z) = f(z)$, de donde:

$$z \in f^{-n}(z_0) \iff -z \in f^{-n}(z_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Así: } z \in \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0) \iff -z \in \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0)$$

Ahora, si $z \in J(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0)}$, entonces $z = \lim_{m \rightarrow \infty} z_m$, donde $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos de $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0)$.

Por lo tanto, $-z = \lim_{m \rightarrow \infty} -z_m$, donde, por propiedad recién probada, $-z_m \in \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0)$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

$$\text{En consecuencia, } -z \in \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0)} = J(f).$$

Es decir, se ha probado que:

$$z \in J(f) \iff -z \in J(f)$$

ii) Ahora supongamos que, además de ser k par, $c \in \mathbb{R}$. Probemos que $J(f)$ es simétrico con respecto al eje X . Para ello, debemos verificar que:

$$z \in J(f) \iff \bar{z} \in J(f)$$

Por la prueba del caso anterior, sabemos que existe z_0 punto periódico repulsor para f y que $z_0 \in J(f)$. Sea $m =$ período de z_0 .

Del hecho que $c \in \mathbb{R}$, es inmediato que:

$$f^n(\bar{z}) = \overline{f^n(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N},$$

y luego:

$$f^m(\bar{z}_0) = \overline{f^m(z_0)} = \bar{z}_0 \text{ y}$$

$$\begin{aligned} |(f^m)'(\bar{z}_0)| &= |f'(f^{m-1}(\bar{z}_0)) \cdot f'(f^{m-2}(\bar{z}_0)) \cdots f'(f(\bar{z}_0)) \cdot f'(\bar{z}_0)| \\ &= |f'(f^{m-1}(z_0)) \cdot f'(f^{m-2}(z_0)) \cdots f'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)| \\ &= \left| \frac{f'(f^{m-1}(z_0)) \cdot f'(f^{m-2}(z_0)) \cdots f'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)}{f'(f^{m-1}(z_0)) \cdot f'(f^{m-2}(z_0)) \cdots f'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)} \right| \\ &= \left| \frac{(f^m)'(z_0)}{(f^m)'(z_0)} \right| \\ &= |(f^m)'(z_0)| \end{aligned}$$

(en un momento se usó la igualdad $f'(\bar{z}) = \overline{f'(z)}$, lo cual es obvio del hecho que $f'(z) = kz^{k-1}$).

Luego: $f^m(\bar{z}_0) = \bar{z}_0$ y $|(f^m)'(\bar{z}_0)| = |(f^m)'(z_0)|$ es decir, \bar{z}_0 es también un punto periódico repulsor para f , y en consecuencia, $\bar{z}_0 \in J(f)$. Así, de (*) tenemos:

$$J(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0)} = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\bar{z}_0)}$$

de donde:

$$J(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(\bar{z}_0)]}.$$

Además:

$$z \in f^{-n}(z_0) \iff \bar{z} \in f^{-n}(\bar{z}_0), \forall n \in \mathbb{N}$$

de aquí,

$$z \in [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(\bar{z}_0)] \iff \bar{z} \in [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(\bar{z}_0)]$$

y luego:

$$z \in \bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(\bar{z}_0)] \iff \bar{z} \in \bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(\bar{z}_0)]$$

Ahora, si $z \in J(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(\bar{z}_0)]}$, entonces:

$z = \lim_{m \rightarrow \infty} z_m$, donde $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos de

$$\bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(\bar{z}_0)]$$

Por lo tanto:

$\bar{z} = \lim_{m \rightarrow \infty} \bar{z}_m$, donde, por propiedad recién probada,

$$\bar{z}_m \in \bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(\bar{z}_0)], \forall m \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, $\bar{z} \in \overline{\bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(\bar{z}_0)]} = J(f)$.

Así, hemos probado que:

$$z \in J(f) \iff \bar{z} \in J(f)$$

La simetría con respecto al eje Y se deduce del hecho (ya probado) que $J(f)$ es simétrico con respecto al origen y con respecto al eje X . ■

Observación 2.2 A continuación se muestran las gráficas de los Conjuntos de Julia de diez polinomios del tipo $z^k + c$ con k par y $c \in \mathbb{C}$ o $c \in \mathbb{R}$, las cuales exhiben las simetrías mencionadas en el resultado 2.1. Estas figuras fueron hechas por un computador con el programa mencionado en el resumen.

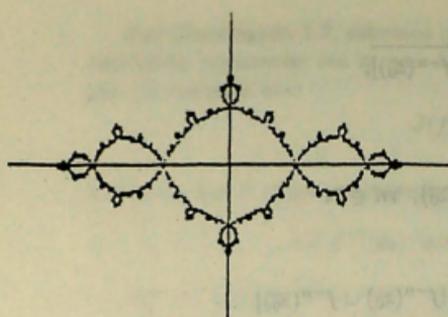
Conjunto de Julia de $z^2 - 1$

Figura 1.

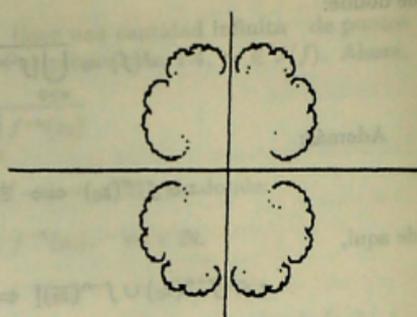
Conjunto de Julia de $z^2 + 0.3$

Figura 2.

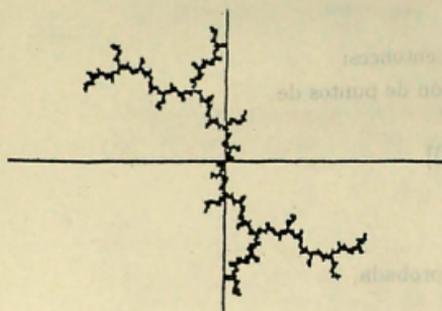
Conjunto de Julia de $z^2 + i$

Figura 3.

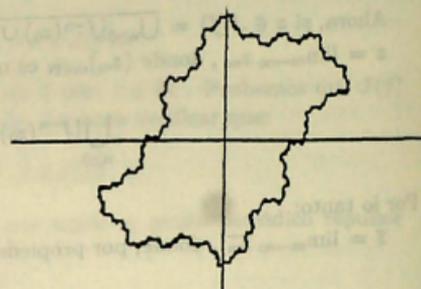
Conjunto de Julia de $z^2 - 0.5i$

Figura 4.

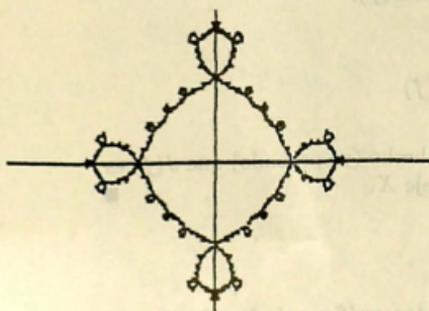
Conjunto de Julia de $z^4 - 1$

Figura 5.

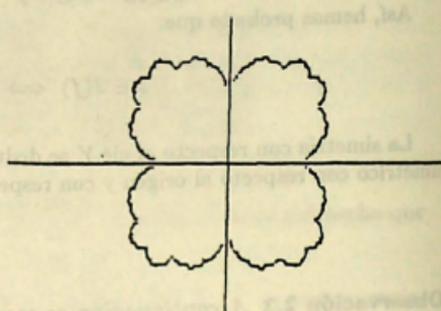
Conjunto de Julia de $z^4 + 0.5$

Figura 6.

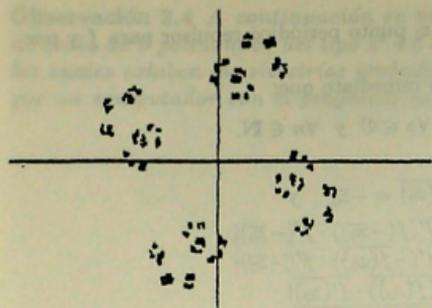
Conjunto de Julia de $z^4 + i$

Figura 7.

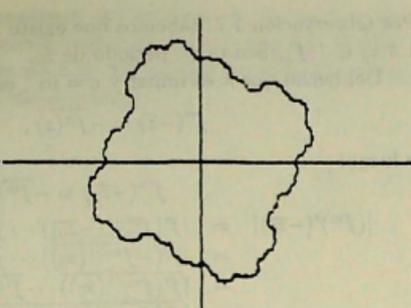
Conjunto de Julia de $z^4 - 0.5i$

Figura 8.

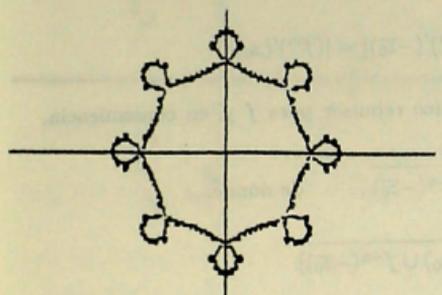
Conjunto de Julia de $z^8 - 1$

Figura 9.

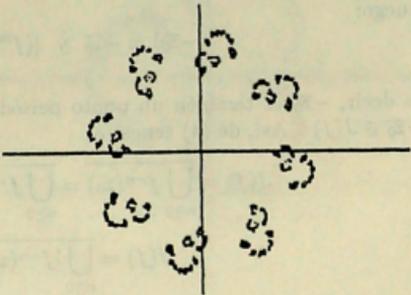
Conjunto de Julia de $z^8 + i$

Figura 10.

Proposición 2.3 Sea $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = z^k + c$, con k un número natural impar y $c \in \mathbb{C}$.

- i) Si $c \in \mathbb{R}$, $J(f)$ es simétrico con respecto al eje X .
- ii) Si $c = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $J(f)$ es simétrico con respecto al eje Y .

Demostración.

i) Sea $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = z^k + c$, $k \in \mathbb{N}$ impar y $c \in \mathbb{R}$.

Si observamos la parte (ii) de la demostración de la Proposición-2.1, nos damos cuenta que para probar la simetría con respecto al eje X , en ningún momento se utilizó el hecho que k era par; sólo se usó que $c \in \mathbb{R}$, ya que esto es lo fundamental. De esta forma vemos que dicha prueba es la misma que corresponde hacer aquí.

ii) Sea $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $f(z) = z^k + i\alpha$, $k \in \mathbb{N}$ impar y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Debemos probar que:

$$z \in J(f) \iff -\bar{z} \in J(f)$$

Por Observación 1.7, sabemos que existe z_0 punto periódico repulsor para f y por 1.4 $z_0 \in J(f)$. Sea $m =$ periodo de z_0 .

Del hecho que k es impar y $c = i\alpha$, es inmediato que:

$$f^n(-\bar{z}) = -\overline{f^n(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}.$$

y luego:

$$\begin{aligned} f^m(-\bar{z}_0) &= -\overline{f^m(z_0)} = -\bar{z}_0 \quad \text{y} \\ |(f^m)'(-\bar{z}_0)| &= |f'(f^{m-1}(-\bar{z}_0)) \cdots f'(f(-\bar{z}_0)) \cdot f'(-\bar{z}_0)| \\ &= |f'(-\overline{f^{m-1}(z_0)}) \cdots f'(-\overline{f(z_0)}) \cdot f'(-\bar{z}_0)| \\ &= \frac{|f'(f^{m-1}(z_0)) \cdots f'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)|}{|f'(\overline{f^{m-1}(z_0)}) \cdots f'(\overline{f(z_0)}) \cdot f'(\overline{z_0})|} \\ &= \frac{|(f^m)'(z_0)|}{|(f^m)'(\bar{z}_0)|} \\ &= |(f^m)'(z_0)| \end{aligned}$$

(en un momento se usó la igualdad $f'(-\bar{z}) = \overline{f'(z)}$, lo cual sale del hecho que $f'(z) = kz^{k-1}$ y $(k-1)$ es par).

Luego:

$$f^m(-\bar{z}_0) = -\bar{z}_0 \quad \text{y} \quad |(f^m)'(-\bar{z}_0)| = |(f^m)'(z_0)|$$

es decir, $-\bar{z}_0$ es también un punto periódico repulsor para f y, en consecuencia, $-\bar{z}_0 \in J(f)$. Así, de (*) tenemos:

$$\begin{aligned} J(f) &= \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0)} = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(-\bar{z}_0)}, \quad \text{de donde:} \\ J(f) &= \overline{\bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(-\bar{z}_0)]} \end{aligned}$$

Además:

$$z \in f^{-n}(z_0) \iff -\bar{z} \in f^{-n}(-\bar{z}_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De aquí:

$$z \in [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(-\bar{z}_0)] \iff -\bar{z} \in [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(-\bar{z}_0)]$$

y luego:

$$z \in \bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(-\bar{z}_0)] \iff -\bar{z} \in \bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(-\bar{z}_0)]$$

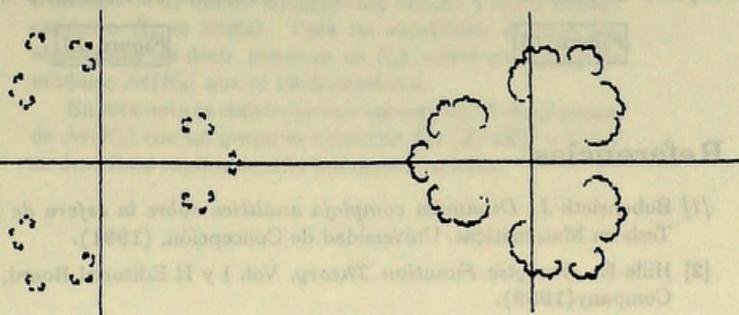
De esto último se deduce que:

$$z \in \overline{\bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(-\bar{z}_0)]} \iff -\bar{z} \in \overline{\bigcup_{n \geq 0} [f^{-n}(z_0) \cup f^{-n}(-\bar{z}_0)]}$$

en forma análoga a como se hizo en la prueba de 2.1.

Así, se ha probado que: $z \in J(f) \iff -\bar{z} \in J(f)$. ■

Observación 2.4 A continuación se muestran las gráficas de los conjuntos de Julia de 6 polinomios del tipo $z^k + c$ con k impar y $c \in \mathbb{R}$ o $c = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, los cuales exhiben las simetrías probadas en 2.2. Estas figuras fueron hechas por un computador con el programa ya mencionado.

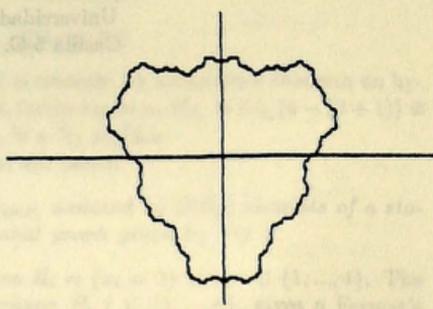
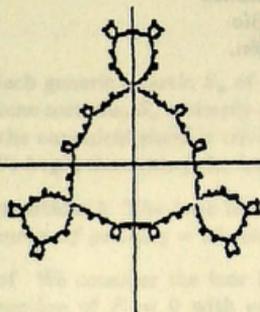


Conjunto de Julia de $z^3 - 1$

Conjunto de Julia de $z^3 + 0.5$

Figura 11.

Figura 12.

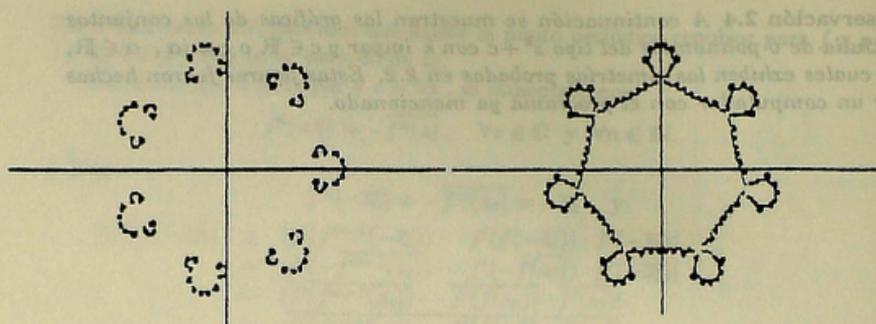


Conjunto de Julia de $z^3 + i$

Conjunto de Julia de $z^3 - 0.5i$

Figura 13.

Figura 14.



Conjunto de Julia de $z^7 - 1$

Figura 15.

Conjunto de Julia de $z^7 + i$

Figura 16.

Referencias

- [1] Bobenrieth J., *Dinámica compleja analítica sobre la esfera de Riemann*, Tesis en Matemáticas. Universidad de Concepción, (1991).
- [2] Hille E., *Analytic Function Theory*, Vol. I y II Editorial Board, Ginn and Company (1959).
- [3] Sad P., *Introdução à dinâmica das funções racionais na esfera de Riemann*, 14 Coloquio Brasileiro de Matemática (1983).

Dirección del autor:
 Departamento de Matemática
 Universidad del Bío Bío
 Casilla 5-C. Concepción.