

## Fractales Geométricos Una Introducción a los Sistemas de Funciones Iteradas

Jorge F. Yazlle & Camilo A. Jadur

*Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas  
Universidad Nacional de Salta  
e-mail: yazlle@unsa.edu.ar  
e-mail: jadur@unsa.edu.ar*

### 1 Introducción

Cada vez con más frecuencia, los *diseños fractales* se involucran en lo cotidiano de nuestra sociedad. Un gran número de personas reconoce una figura fractal y relaciona de manera natural a los fractales con la geometría de ciertos conjuntos de gran complejidad que tienen la propiedad de que cualquier fragmento de ellos tiene gran semejanza con partes más amplias del conjunto total. Esto es así, dado que esta propiedad resume de algún modo la esencia de los conjuntos fractales.

En los medios profesionales, es notable la creciente demanda de información, sobre este tópico en general y de sus aplicaciones a múltiples disciplinas.

Como disciplina matemática, aún cuando tiene sus primeros antecedentes hacia fines del siglo XIX, ha recibido un espectacular impulso en estos últimos 25 años, seguramente con el descubrimiento de insospechadas aplicaciones en diversos campos. *Las formas de la naturaleza son fractales y múltiples procesos de la misma se rigen por comportamientos fractales* (B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature", 1977).

El propósito de este artículo es hacer una presentación, con cierto nivel de generalidad, de una de las formas clásicas de generar conjuntos fractales: mediante los *Sistemas de Funciones Iteradas*. La idea es describir un *mecanismo* para generar tales conjuntos, y estaremos principalmente interesados en conjuntos fractales de los planos cartesiano y complejo.

No se pretende formalizar todos los resultados a utilizar en el desarrollo; para ello, remitimos al lector a la bibliografía. Más bien, estamos interesados en

dejar una idea clara del ambiente de construcción de estos conjuntos, y de los procedimientos involucrados, con la esperanza de estimular la lectura de tópicos más avanzados en el tema, que no serán tratados aquí, como por ejemplo la conexión con los sistemas dinámicos simbólicos o la dimensión fractal.

## 2 Construyendo el Contexto.

Sea  $X$  un conjunto cualquiera, y  $d$  una función de  $X \times X$  en  $\mathbb{R}$  que satisfaga los siguientes axiomas (*axiomas de distancia*):

- $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$  (propiedad de simetría)
- $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$
- $\forall x \in X, d(x, x) = 0$
- $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (propiedad triangular)

Llamaremos **espacio** a  $X$ , **métrica** o **distancia** en  $X$  a la función  $d$ , **puntos** a los elementos de  $X$ , y **espacio métrico** al par  $(X, d)$ . En estas notas, vamos a estar interesados principalmente en espacios métricos clásicos, tales como  $(\mathbb{C}, d_e)$  donde  $\mathbb{C}$  es el conjunto de los números complejos y  $d_e$  la métrica euclídea, definida mediante:

$$d_e(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \text{para } z_1 = (x_1, y_1), \quad z_2 = (x_2, y_2),$$

o también  $(\mathbb{R}^2, d_e)$ .

**Ejercicio:** Mostrar que  $(\mathbb{C}, d_e)$  así definido es un espacio métrico.

**Ejercicio:** Mostrar que  $(\mathbb{C}, d_m)$  es también un espacio métrico si definimos  $d_m$  mediante:

$$d_m(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad \text{para } z_1 = (x_1, y_1), \quad z_2 = (x_2, y_2)$$

Nuestros dos primeros ejercicios nos hacen notar que, sobre un mismo espacio  $X$ , podemos tener definidas varias métricas.

Si  $(X_1, d_1)$  y  $(X_2, d_2)$  son dos espacios métricos, una función  $f: X_1 \rightarrow X_2$  es **continua** si

$$\forall x \in X_1, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in X_1, d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Una sucesión en  $X$ , denotada por  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  (o simplemente  $\{x_n\}$ ), es una función de  $\mathbb{N}$  en  $X$ . Llamaremos **término enésimo** de la sucesión al valor  $x_n$ . Una subsucesión  $\{x_{n_j}\}$  de  $\{x_n\}$  es una sucesión tal que  $\forall j, n_j < n_{j+1}$ . Una **sucesión de Cauchy** en  $(X, d)$  es una sucesión tal que  $\forall \epsilon > 0, \exists N : m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$ .

Diremos que una sucesión  $\{x_n\}$  en  $(X, d)$  tiene **límite**  $x \in X$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists N : n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$ . Diremos en este caso que  $\{x_n\}$  converge a  $x$ , y denotaremos este hecho mediante  $\lim x_n = x$ .

Para un espacio métrico  $(X, d)$ , y un punto  $x \in X$ , definimos la **bola abierta alrededor de  $x$  con radio  $\epsilon > 0$**  al conjunto

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Una propiedad del límite de una sucesión es que cualquier bola alrededor de él contiene a todos los términos de la sucesión, salvo una cantidad finita.

Al igual que con las sucesiones de números reales, en cualquier espacio métrico toda sucesión convergente es de Cauchy (dejamos como ejercicio la demostración), pero no necesariamente una sucesión de Cauchy es convergente (pensemos en el espacio métrico  $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$  y la sucesión definida por  $x_n = \frac{1}{n}$ ). Esto motiva el concepto de **espacio métrico completo**: aquel en el que toda sucesión de Cauchy tiene límite.

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $S \subset X$ . Un punto  $x \in X$  se llama **punto límite** de  $S$  si hay una sucesión de puntos de  $S - \{x\}$  cuyo límite es  $x$ ; o, equivalentemente, si cualquier bola alrededor de  $x$  contiene infinitos puntos de  $S$ . El conjunto  $\bar{S} = S \cup \{x : x \text{ es punto límite de } S\}$  se llama la **clausura** de  $S$ .  $S$  se dice **cerrado** si contiene a todos sus puntos límite, es decir, si  $S = \bar{S}$ . Se dice que  $S$  es **compacto** si toda sucesión  $\{x_n\}$  en  $S$  tiene subsucesión con límite en  $S$ .  $S$  se llama **acotado** si  $\exists a \in X, r \in \mathbb{R} : \forall x \in S, d(a, x) < r$ , lo que equivale a decir que el conjunto  $S$  está contenido en alguna bola.  $S$  se dice **totalmente acotado** si para todo  $\epsilon > 0$ , existe un subconjunto finito  $M = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$  de  $S$  tal que  $\forall x \in S, \exists y_i \in M : d(x, y_i) < \epsilon$ . Esto equivale a decir que dado  $\epsilon > 0$ ,  $S$  está incluido en la unión de un número finito de bolas centradas en puntos de  $S$ . Ocurre que si un espacio métrico es totalmente acotado entonces es acotado. La recíproca no es en general cierta, pero para  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}$  es válida.

$S$  se llama **abierto** si  $\forall x \in S, \exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset S$ . Puede demostrarse que un conjunto es abierto si su complemento es cerrado, y viceversa.

Se puede demostrar que si  $(X, d)$  es completo,  $S$  es compacto si y sólo si es cerrado y totalmente acotado. Como en  $(\mathbb{R}^2, d_e)$  acotado equivale a totalmente acotado, se tiene en este espacio el clásico teorema de *Heine-Borel*:  $S$  es compacto si y sólo si  $S$  es cerrado y acotado.

### 3 El espacio de los Fractales

Consideremos un espacio métrico completo  $(X, d)$  (notar que  $(\mathbb{C}, d_e)$  lo es). Denotaremos por  $\mathcal{H}(X)$  a la familia de subconjuntos de  $X$  que sean compactos y distintos del vacío. Es decir,

$$\mathcal{H}(X) = \{B \subset X : B \text{ es compacto, } B \neq \emptyset\}.$$

Por ejemplo, en  $(\mathbb{C}, d_e)$ , el disco  $|z| \leq 1$  es un elemento de  $\mathcal{H}(\mathbb{C})$

Ahora nuestro objetivo es definir una métrica para este nuevo conjunto. Para esto, vamos a empezar definiendo una distancia entre un punto  $x \in X$  y un punto  $B \in \mathcal{H}(X)$  como sigue:

$$d(x, B) = \text{Mín}\{d(x, y) : y \in B\},$$

es decir,  $d(x, B)$  es la menor de las distancias desde  $x$  hasta los puntos de  $B$  que pertenezcan a  $B$ . ¿Cómo sabemos que existe ese mínimo? Alguien más cauteloso estaría tentado de poner "ínfimo" en lugar de "mínimo". Pero, en base a la compacidad de  $B$  y a la continuidad de  $d$ , puede demostrarse que ese ínfimo se alcanza en  $B$ , lo que justifica la "sobrecarga" de la letra  $d$ :  $d(x, B) = d(x, y)$  para algún  $y \in B$ . Véase la figura 1.a. a modo de ejemplo en el espacio métrico  $(\mathbb{C}, d_e)$ .

Ahora estamos en condiciones de definir una *cuasidistancia* para  $\mathcal{H}(X)$ , mediante:

$$d(A, B) = \text{Máx}\{d(x, B) : x \in A\} \quad \forall A, B \in \mathcal{H}(X).$$

De nuevo hemos usado  $d$  porque se demuestra que  $d(A, B) = d(a, b)$  para algún  $a \in A$  y algún  $b \in B$ .

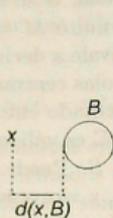


Figura 1.a.

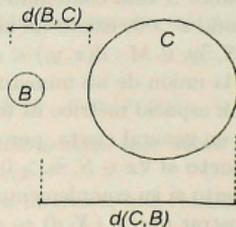


Figura 1.b.

Esta cuasidistancia tiene la siguiente propiedad:

$$\forall A, B, C \in \mathcal{H}(X), d(A \cup B, C) = \text{Máx} \{d(A, C), d(B, C)\}.$$

**Ejercicio:** Probar la propiedad anterior.

¿Por qué “cuasi”? Porque no cumple con el axioma de simetría, como puede verse en el ejemplo de la figura 1.b. Sin embargo, sirve para definir una métrica  $h$  en  $\mathcal{H}(X)$  mediante

$$h(A, B) = \text{Máx} \{d(A, B), d(B, A)\} \quad \forall A, B \in \mathcal{H}(X),$$

resultando  $(\mathcal{H}(X), h)$  un espacio métrico completo;  $h$  se llama **métrica de Hausdorff**.

Esta métrica tiene la propiedad de que

$$\forall B, C, D, E \in \mathcal{H}(X), h(B \cup C, D \cup E) \leq \text{Máx} \{h(B, D), h(C, E)\}$$

(dejamos como ejercicio su demostración).

El hecho de que  $(\mathcal{H}(X), h)$  sea completo es de relevancia en nuestra búsqueda de conjuntos fractales.

Un ejemplo de sucesión  $\{B_n\}$  en  $\mathcal{H}(\mathbb{C})$  es la dada por  $B_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 + \frac{1}{n}\}$ , es decir, la familia de discos con centro en el origen y radio  $1 + \frac{1}{n}$ . Conforme crece  $n$ ,  $B_n$  se parece cada vez más al disco  $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ , de modo que, intuitivamente, vemos que éste es el límite de la sucesión. Se deja como ejercicio probar que la sucesión  $\{B_n\}$  es de Cauchy, que  $\mathcal{A} = \lim B_n$  y que  $\mathcal{A}$  tiene la propiedad de que todos sus puntos son el límite de alguna sucesión  $\{x_n \in B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

En general vale que si  $\{B_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(X)$  y  $\mathcal{A}$  es su límite, entonces  $\mathcal{A}$  se puede caracterizar como sigue:

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \text{existe una sucesión de Cauchy } \{x_n \in B_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \lim x_n = x\}$$

## 4 Transformaciones en espacios métricos.

Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, llamaremos una **transformación en  $X$**  a cualquier función de  $X$  en  $X$ . Si  $S$  es un subconjunto de  $X$ , designaremos por  $f(S)$  al transformado de  $S$  bajo  $f$ , es decir,  $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$ . Si  $f$  es una transformación en  $(X, d)$ , definimos las **iteraciones hacia adelante** de  $f$  a las transformaciones  $f^{[n]} : X \rightarrow X$  determinadas por:  $f^{[0]}(x) = x$ ,  $f^{[1]}(x) = f(x)$ ,  $f^{[n+1]}(x) = f \circ f^{[n]}(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $f$  es biyectiva (y por tanto inversible), definimos las **iteraciones hacia atrás** de  $f$  a las transformaciones  $f^{[-n]} : X \rightarrow X$  determinadas por:  $f^{[-1]}(x) = f^{-1}(x)$ ,  $f^{[-n]}(x) = (f^{[n]})^{-1}(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

### Transformaciones contractivas

Se dice que  $f : X \rightarrow X$  es una **transformación contractiva**, o **contracción**, si existe una constante  $s$ , no negativa y menor que 1, tal que:

$$\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq sd(x, y)$$

Una tal constante  $s$  se llama **factor de contractividad**.

**Ejercicio:** Mostrar que si  $s$  es un factor de contractividad de  $f$ , y  $1 > s' > s$ , entonces  $s'$  es también un factor de contractividad.

Vamos a recordar un teorema clásico del Análisis, el **Teorema del Punto Fijo de Banach**, que va a ser clave en nuestro desarrollo, y que enuncia:

Sea  $f : X \rightarrow X$  una contracción en el espacio métrico completo  $(X, d)$ . Entonces:

- $f$  tiene un único punto fijo  $x_f \in X$ .
- $\forall x \in X, \lim f^{[n]}(x) = x_f$ .

Un resultado conocido es que cualquier función contractiva en un espacio métrico es continua (queda como ejercicio esta demostración), y por lo tanto transforma conjuntos compactos en conjuntos compactos. Es decir, dada una transformación  $f$  contractiva en  $X$ , con factor de contractividad  $s$  y con punto fijo  $x_f$ , se induce una transformación  $f : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ , definida por  $f(B) = \{f(x) : x \in B\} \forall B \in \mathcal{H}(X)$ , que también resulta contractiva en el espacio métrico  $(\mathcal{H}(X), h)$ , con el mismo factor de contractividad  $s$ , y cuyo punto fijo es  $\{x_f\}$ .

Ahora, supongamos que en  $(X, d)$  tenemos definidas dos transformaciones contractivas  $w_1$  y  $w_2$ , con factores de contractividad  $s_1$  y  $s_2$  respectivamente. Definamos una nueva transformación  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  mediante:

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

Vamos a demostrar que  $W$  es una contracción en  $\mathcal{H}(X)$ , con factor de contractividad  $s = \text{Máx}\{s_1, s_2\}$ .

Sean  $B, C \in \mathcal{H}(X)$ . Tenemos

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) \\ &\leq \text{Máx}\{h(w_1(B), w_1(C)), h(w_2(B), w_2(C))\} \\ &\leq \text{Máx}\{s_1 h(B, C), s_2 h(B, C)\} \leq \text{Máx}\{s_1, s_2\} h(B, C) = s h(B, C). \end{aligned}$$

Un argumento inductivo nos permite hacer una generalización, como veremos en la siguiente sección.

## 5 Sistemas de funciones Iteradas

Un **sistema de funciones iteradas** (en adelante SFI) es un espacio métrico completo  $(X, d)$  junto con un conjunto finito de transformaciones contractivas  $w_1, w_2, \dots, w_N$  en  $X$ , con factores de contractividad  $s_1, s_2, \dots, s_N$  respectivamente. Definimos el **factor de contractividad del SFI** como el máximo de los factores de contractividad de las contracciones del sistema. Usaremos la notación  $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  para denotar un SFI.

Dado un SFI  $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ , definimos  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  mediante:

$$W(B) = \cup_{n=1}^N w_n(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

que resulta una transformación contractiva en el espacio métrico completo  $(\mathcal{H}(X), h)$ , con factor de contractividad  $s = \text{Máx}\{s_n : n = 1 \dots N\}$ . Por lo tanto, tiene un único punto fijo que llamaremos el **atractor**  $\mathcal{A}$  del SFI, que satisface:

$$\mathcal{A} = W(\mathcal{A}) = \cup_{n=1}^N w_n(\mathcal{A})$$

y caracterizado por:

$$\mathcal{A} = \lim W^{[n]}(B), \text{ cualquiera sea } B \in \mathcal{H}(X).$$

Veamos lo que esto nos dice: dado un SFI  $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ ,

1. Tómesese cualquier subconjunto compacto no vacío  $B$  de  $X$  (por ejemplo un simple conjunto unitario).
2. Obténgase  $w_1(B), w_2(B), \dots, w_N(B)$ .
3. Establézcase la unión de los transformados  $\cup_{n=1}^N w_n(B)$ .
4. Llámese  $B$  al conjunto así obtenido, para volver al paso 2.

Tenemos así establecido un algoritmo para computar en una cantidad finita de pasos una aproximación del atractor del SFI, cuya existencia está asegurada por el teorema del punto fijo.

¿Qué características tiene el atractor de un SFI? ¿Será siempre una figura de gran complejidad geométrica? Veremos que no necesariamente. El atractor puede resultar tan simple como un conjunto unitario (por ejemplo el caso de un sistema con una sola transformación contractiva), un triángulo o un cuadrado, como veremos en los ejemplos, más adelante. Naturalmente este tipo de sistemas, triviales diríamos, no revisten gran interés.

El hecho de que  $\mathcal{A} = W(\mathcal{A}) = \cup_{n=1}^N w_n(\mathcal{A})$ , es decir, la *invariancia* de  $\mathcal{A}$  bajo  $W$ , es de gran utilidad para corroborar si un conjunto es, o no, el atractor de un SFI dado, como veremos posteriormente.

## Algunos sistemas de funciones iteradas en el plano

Ahora nos vamos a interesar en ciertos sistemas de funciones iteradas en el plano. Para eso, necesitamos manejar transformaciones contractivas en él. Hay una gran variedad de tales transformaciones, pero aquí vamos a dedicarnos a un particular tipo de ellas, a saber, las **transformaciones afines** contractivas.

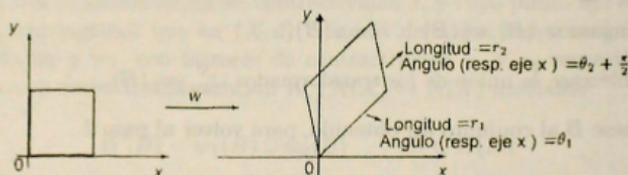
Una transformación afín en el plano es una función  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$$w(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \text{ con } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Si llamamos  $(r_1, \theta_1)$  a las coordenadas polares del punto del plano cuyas coordenadas rectangulares son  $(a, c)$ , y  $(r_2, \theta_2 + \frac{\pi}{2})$  a las correspondientes al punto  $(b, d)$ , ocurrirá que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 & -r_2 \sin \theta_2 \\ r_1 \sin \theta_1 & r_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Para visualizar la forma en que actúa esta transformación sin traslación (es decir,  $e = 0 = f$ ), notemos que el cuadrado unidad (con dos de sus lados sobre los ejes) se transformará en un paralelogramo, de acuerdo a la siguiente figura:

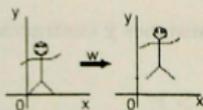


## Algunos tipos especiales de transformaciones afines

En cada caso se muestra la particular forma de la matriz y el efecto típico que produce.

### 1) Traslaciones:

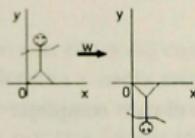
$$w(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$



Si trabajamos en el espacio métrico  $\mathbb{C}$  en lugar de  $\mathbb{R}^2$ , la transformación toma la sencilla forma:  $w(z) = z + (e, f)$

- 2) - Reflexiones respecto al eje horizontal:

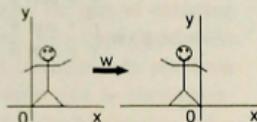
$$w(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Para el caso complejo:  $w(z) = \bar{z}$ .

- Reflexiones respecto al eje vertical:

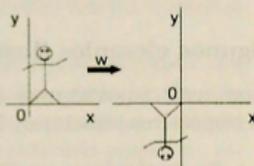
$$w(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Para el caso complejo:  $w(z) = -\bar{z}$

- Reflexiones respecto al origen de coordenadas:

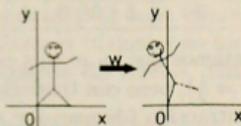
$$w(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Para el caso complejo:  $w(z) = -z$ .

- 3) Rotaciones alrededor del origen:

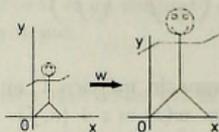
$$w(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



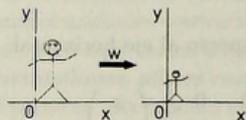
Para el caso complejo:  $w(z) = kz$  con  $k \in \mathbb{C}$ ,  $|k| = 1$  y  $\arg(k) = \theta$ .

- 4) Expansiones y contracciones al origen:  $w(x, y) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Si  $r > 1$ :



Si  $r < 1$ :

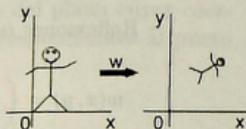


Para el caso complejo:  $w(z) = rz$ , con  $r \in \mathbb{R}$ .

- 5) Similitudes: Composición de las anteriores.

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$



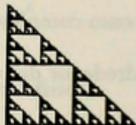
Para el caso complejo:  $w(z) = az + b$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$ , que produce una rotación dada por  $\theta = \arg(a)$ , una expansión o contracción dada por  $|a|$ , y una traslación dada por  $b$ .

### Algunos ejemplos ilustrativos

Ahora mostramos algunos sistemas de funciones iteradas  $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  y sus respectivos atractores. En todos los casos, las transformaciones  $w_i$  son afines.

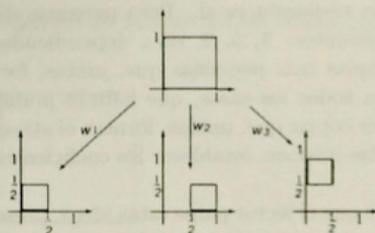
- EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI:

Transf.	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
1	.5	0	0	.5	0	0
2	.5	0	0	.5	.5	0
3	.5	0	0	.5	0	.5



Notemos que  $w_1$  es una contracción pura con  $r = \frac{1}{2}$ ;  $w_2$  es otra contracción ( $r = \frac{1}{2}$ ), pero con traslación de media unidad hacia la derecha; y  $w_3$  es otra contracción (de nuevo,  $r = \frac{1}{2}$ ) con traslación de media unidad hacia arriba.

Vémoslas en acción sobre el cuadrado unitario:



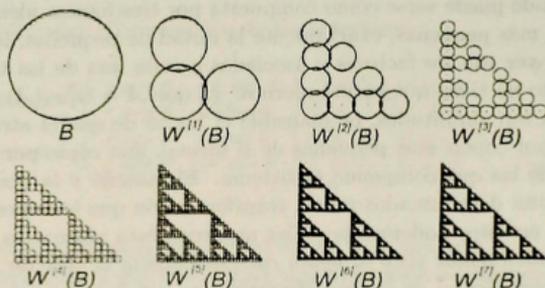
Podemos caer en cuenta de que cada una produce una copia del cuadrado, contraída y, en el caso de  $w_2$  y  $w_3$ , trasladada a derecha y hacia arriba respectivamente. Ahora, si observamos el atractor, vemos una situación similar: la figura grande puede verse como compuesta por tres figuras idénticas a sí misma, pero más pequeñas, exactamente la mitad de pequeñas, lo que tiene mucho que ver con los factores  $r$  asociados a cada una de las transformaciones. Esto no tiene que sorprendernos: ya que  $\mathcal{A} = \cup_1^3 w_i(\mathcal{A})$  y las transformaciones son similitudes, es plausible el hecho de que el atractor esté compuesto por copias más pequeñas de sí mismo, una copia por cada transformación de las que componen el sistema. El tamaño y la posición de cada copia están determinados por la transformación que le corresponde. Basándonos en esto, podemos postular una respuesta afirmativa para la pregunta: *Si hubiésemos visto la figura correspondiente al atractor, pero sin conocer los coeficientes de las transformaciones, ¿podríamos haber deducido cuántas transformaciones están en juego, y cuáles son los valores de sus coeficientes?*

Más arriba dijimos que este atractor puede verse como compuesto por tres copias idénticas de sí mismo, pero de la mitad de su tamaño. Sin embargo, con un poco de atención, podemos reparar que podríamos haberlo considerado también como compuesto por nueve copias más pequeñas, todas ellas de tamaño igual a un cuarto del tamaño del atractor. Podríamos haberlo visto también como cinco copias: dos de la mitad del tamaño y tres de la cuarta parte (¿puede el lector verlo?). Incluso, podríamos identificar 27, 81, etc., copias más pequeñas (a distinta escala). En realidad, estamos en presencia de una característica fundamental de todo fractal, la *autosimilaridad bajo magnificación*: si amplificáramos cualquier sector del atractor, veríamos en él siempre copias más pequeñas del mismo. Esto es una consecuencia del proceso iterativo infinito.

Consideremos, entonces, parcialmente la pregunta de más arriba: Con sólo ver el atractor, ¿podemos saber cuántas transformaciones están en jue-

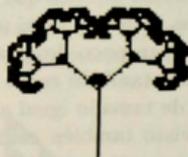
go? Como dijimos, la respuesta es sí. Pero personas diferentes podrían contestar números diferentes: 3, 5, 9, etc., dependiendo de cómo hayan podido percibir las copias más pequeñas que, juntas, forman el atractor. El rasgo común es, en todos los casos, que habrán podido reconocer una cantidad **finita** de tales copias que, unidas, forman el atractor completo. Y, una vez identificadas las mismas, establecer los coeficientes es una cuestión de cálculo algebraico.

Con la intención de que el lector palpe estas ideas, presentamos la figura siguiente, que muestra, para el triángulo de Sierpinski, el proceso de las 7 primeras iteraciones de  $W$ , partiendo de un conjunto  $B$  consistente en un círculo (podría haber sido cualquier compacto no vacío del plano, en virtud del teorema del punto fijo):



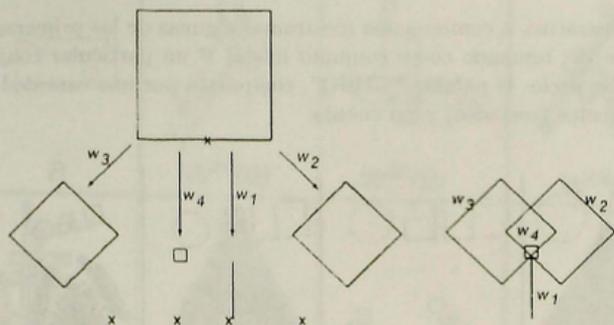
• UN ÁRBOL FRACTAL:

Transf.	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
1	0	0	0	.5	0	0
2	.42	-.42	.42	.42	0	.2
3	.42	.42	-.42	.42	0	.2
4	.1	0	0	.1	0	.2



Analicemos la relación entre la figura del atractor y las transformaciones involucradas, viendo primero la forma en que las mismas actúan sobre un cuadrado. A continuación, dibujamos el cuadrado y, debajo del mismo, los respectivos transformados; para tener una referencia de las traslaciones, hemos representado, en cada caso, la posición del origen de coordenadas con una cruz. A la derecha, aparecen los cuatro transformados superpuestos en

un mismo gráfico; adviértase la analogía de trama gruesa entre esta figura y la del atractor.



$w_1$  es bastante deformante: transforma al cuadrado en un segmento.

$w_2$  es una similitud que contrae al 60% aproximadamente, produce una rotación horaria de  $45^\circ$  y desplazamiento hacia arriba de 0.2.

$w_3$  es similar a  $w_2$ , salvo que la rotación es antihoraria.

$w_4$  es una contracción al 10% y traslación hacia arriba de 0.2.

No nos sorprende entonces que el atractor está compuesto por cuatro copias de sí mismo, más pequeñas, con las características que imprime cada una de las transformaciones actuantes (!el tallo del Árbol es una "copia" del atractor entero!, y las otras copias son más evidentes).

#### • UN HELECHO:

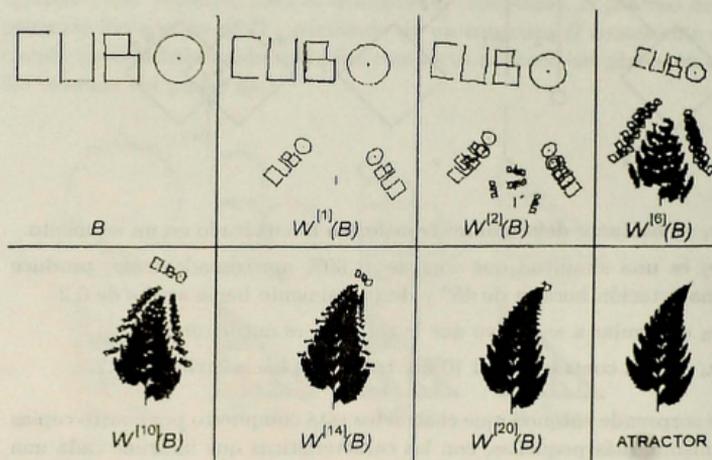
Transf.	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
1	0	0	0	.16	0	0
2	.85	.04	-.04	.85	0	1.6
3	.2	-.26	.23	.22	0	1.6
4	-.15	.28	.26	.24	0	.44



Dejamos al lector la detección de las copias más pequeñas que componen el atractor, y su relación con las transformaciones involucradas. En relación a esto, puede confundir el hecho de que, al observar la imagen del atractor, uno ve muchas copias pequeñas del mismo (lo cual proviene del carácter fractal de la figura), pero insistimos: la consigna es encontrar una cantidad

finita de tales copias (cuatro en este caso), cuya unión produzca el atractor completo.

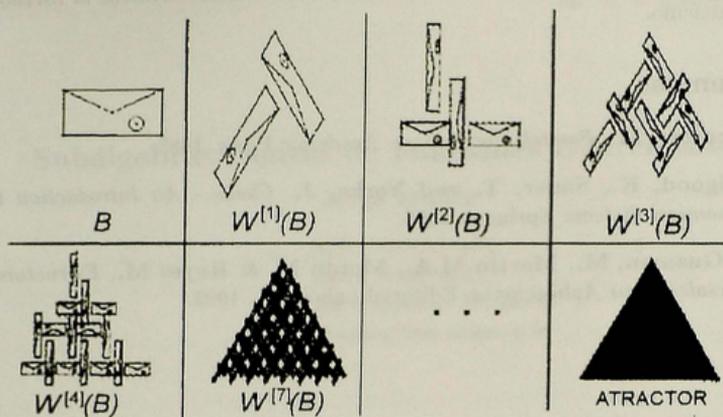
A título ilustrativo, a continuación mostramos algunas de las primeras iteraciones de  $W$ , tomando como conjunto inicial  $B$  un particular conjunto compacto no vacío: la palabra "CUBO", compuesta por una cantidad finita de segmentos (cerrados) y un círculo.



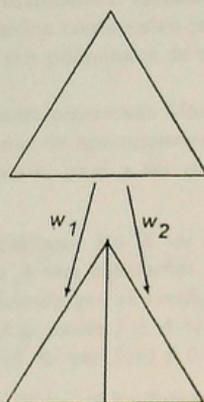
• UN ATRACTOR NO FRACTAL:

Transf.	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
1	-0.5	-0.2671	0.9361	-0.5	1.1799	-0.0495
2	-0.5	0.2671	-0.9361	-0.5	0.678	1.1099

Veamos algunas de las primeras iteraciones de  $W$  comenzando en un conjunto compacto no vacío cualquiera, y la figura que resulta como atractor:



Notemos que efectivamente el triángulo obtenido como atractor es invariante bajo  $W$ , como lo muestra la siguiente figura:



Observemos que  $W(\mathcal{A}) = w_1(\mathcal{A}) \cup w_2(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ .

El problema general de construir un sistema de funciones iteradas cuyo atractor se conoce a priori, es motivo de intensas investigaciones actuales.

Agradecemos al Dr. Thomas N. Hibbard y a los señores árbitros la revisión de este artículo.

## Referencias

- [1] Barnsley, M., *Fractals everywhere*. Academic Press. 1988.
- [2] Alligood, K., Sauer, T. and Yorke, J., *Chaos - An Introduction to Dynamical Systems*. Springer. 1996.
- [3] de Guzman, M., Martín M.A., Morán M. & Reyes M., *Estructuras Fractales y sus Aplicaciones*. Editorial Labor S.A. 1993.